Cap. 2 : Mecânica Relativística

Resumo: as leis da Mecânica Clássica não são invariantes sob a transformação de Lorentz. Portanto, não estão corretas; devemos encontrar uma nova mecânica (relativística) que obedeça a esta invariância.

Vamos ver que esta nova mecânica também é construída em torno dos conceitos de massa, momento, energia e força. No entanto, as definições relativísticas destes conceitos devem ser diferentes das de seus equivalentes clássicos. Na procura destas novas definições e das leis que as conectam seremos guiados por 3 princípios:

- leis relativísticas devem ser invariantes sob Lorentz;
- conceitos e leis relativísticos devem ter os equivalentes clássicos como seus limites para velocidades pequenas;
- novas leis devem ser referendadas pelos resultados experimentais

Objetivos de aprendizagem

- calcular momento e energia relativísticos
- usar leis da mecânica relativística
- compreender a equivalência entre massa e energia

2.2 Massa na Relatividade

Vamos defini-la como o quociente entre força aplicada e aceleração adquirida medidas no referencial em que o objeto está (instantaneamente) em repouso — vamos nos referir a ela como massa de repouso, ou massa própria, para enfatizar o procedimento. Por definição, ela é invariante, e tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial.

(Se ~~o~~ $\underline{m}$ em S e $\underline{m}'$ em S' fossem diferentes, poderíamos definir um referencial preferencial - e.g., aquele onde $\underline{m}$ fosse mínimo)

Alguns físicos usam uma definição diferente, chamada de massa variável.

2.3 Momento relativístico

~~O momento clássico $\vec{p} = m\vec{v}$ não~~

A lei de conservação do momento clássico $\vec{p} = m\vec{v}$ não é invariante sob Lorentz, como vamos mostrar em breve. Isto sugere a questão: qual a definição correta de momento?

A pergunta não faz sentido, não tem resposta. A pergunta pertinente é: esta definição é útil na Relatividade?

Outra forma equivalente:

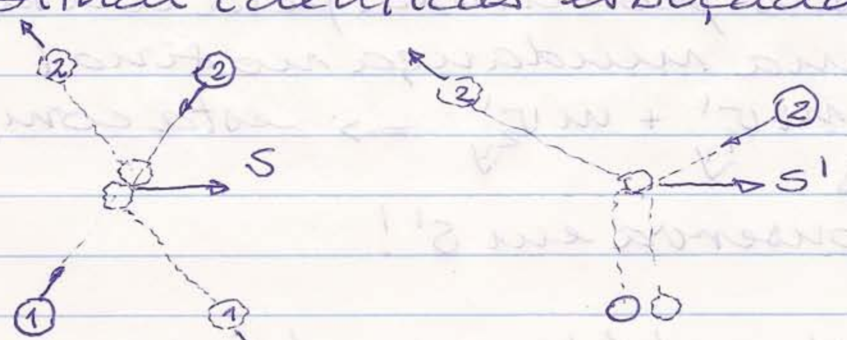
Se a lei de conservação do momento não é invariante relativística, devemos abandoná-la ou procurar uma definição de momento que a torne invariante? Árbitro final: a Natureza!

A resposta é: devemos encontrar uma nova definição de $\vec{p}$ que atenda aos requisitos:

1.- $\vec{p} \simeq m\vec{v}$ quando $v \ll c$
2. $\sum_i \vec{p}$ de um sistema isolado é constante em qualquer referencial inercial

Vamos mostrar que a definição clássica, que atende trivialmente ao requisito 1, não atende ao 2 - justificando a 1ª frase desta seção.

Considere a colisão de 2 bolas de bilhar idênticas esboçada abaixo.



Em S, as velocidades iniciais são iguais e opostas, as componentes x das velocidades não se alteram, componentes y invertem o sentido. Em S,

$$\sum_i m\vec{v}\,(\text{antes}) = \sum_i m\vec{v}\,(\text{depois})$$

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$
Antes	(a, b)	$(-a, -b)$	$(0, 0)$
Depois	$(a, -b)$	$(-a, b)$	$(0, 0)$

Vamos olhar a mesma colisão em S', que se move na direção x de S com velocidade $\vec{V} = a\hat{x}$ (= v_x da bola 1 em S)

Se S e S' fossem ligados pela transformação de Galileu, teríamos

	$\vec{v}_1'$	$\vec{v}_2'$	$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$
Antes	$(0, b)$	$(-2a, -b)$	$(-2ma, 0)$
Depois	$(0, -b)$	$(-2a, b)$	$(-2ma, 0)$

e a lei de conservação de momento é invariante sob Galileu.

OK; e sob Lorentz, que é a maneira correta de transformar velocidades? Mesmo sem fazer as contas: como v_y' <u>depende</u> de v_x, as componentes y não terão mais o mesmo valor em S' e a inversão produzida pela colisão provoca uma mudança no sinal da soma $m v_{1y}' + m v_{2y}'$ $\Rightarrow$ esta componente não mais se conserva em S'!

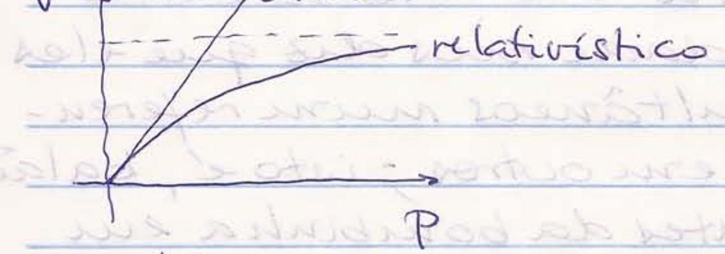
Este efeito está ligado - lembre da dedução da fórmula de soma de velocidades - à transformação de Lorentz para o tempo - o que sugere redefinir o momento para $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{r}}{dt_0}$ ← tempo próprio, que tem o mesmo valor para qualquer observador (referencial).

Expresso em termos do tempo medido em S - lembrando a conexão entre o intervalo de tempo próprio e o intervalo medido em S, $\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$ - temos

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt_0} = m \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m \vec{v},$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$ → velocidade medida em S.

Consequência importante da presença do fator γ: a velocidade de um objeto não pode ser maior que a da luz! Veremos que, também na Relatividade, uma força constante faz $\vec{p}$ variar a uma taxa constante, e pode crescer sem limites ⇒ v e γ aumentam. Mas quando $v \to c$, γ aumenta indefinidamente ⇒ a força constante finda por aumentar γ sem que v chegue a c



Alguns físicos gostam de pensar assim:

$$\vec{p} = m_{var} \vec{v}, \quad m_{var} = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

⇒ tem a vantagem de tornar o momento relativístico se parecer mais (aparentemente) com o clássico. No entanto, a introdução dessa ideia não consegue um paralelismo completo com a mecânica clássica:

- a energia cinética relativística $\underline{não}$ $\underline{é}$ $\frac{1}{2} m_{var} v^2$;

- a 2ª lei relativística $\underline{não}$ $\underline{é}$ $\vec{F} = m_{var} \vec{a}$

Limite cósmico de velocidade

c : velocidade limite para qualquer tipo de influência causal

- Influência causal:
  - jogo pedra que quebra vidro
  - feixe laser atinge detetor que dispara explosão

causa efeito

- Sejam 2 eventos não relacionados: balão de gás estoura em Paris, bombinha explode em Niterói: a relatividade da simultaneidade nos diz que eles podem ser simultâneos num referencial e não o ser em outros; isto é, balão pode estourar antes da bombinha em uns, e o inverso acontecer em outros. Estas possibilidades violam nosso senso comum, mas não estão em conflito com o princípio da relatividade.

Para 2 eventos causalmente relacionados

Exemplos:

1. Momento de partícula subatômica
Elétron com $v = 0{,}999c$ (em S, laboratório)
→ colide com alvo e produz muon com
$v = 0{,}95c$ (em S); $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg,
$m_\mu = 1{,}90\times10^{-28}$ kg.
Qual o momento do muon em S e no referencial do feixe de elétrons?

modelo: S é laboratório, S' é referencial de repouso dos elétrons com $V = 0{,}999c$.
$v_\mu = 0{,}95c$ em S

solução:
Em S, $\gamma_{muon} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}20$

$p = 3{,}20 \times 1{,}90\times10^{-28} \times 0{,}95 \times 3{,}00\times10^8$
$= 1{,}73\times10^{-19}$ kgm/s
(3,2 x maior que p newtoniano)

Em S': vamos calcular v'_{muon} com a transformação de Lorentz

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2} = \frac{0{,}95c - 0{,}999c}{1-(0{,}95c)(0{,}999c)/c^2} = -0{,}962c$$

(v' é negativa; significado?)

$$\gamma'_{muon} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}962^2}} = 3{,}66, \text{ e}$$

$p' = \gamma' m v' = -2{,}01\times10^{-19}$ kgm/s

2. Objeto de metal de 1 kg tem $v = 0{,}4c$.
p? ; e se $v \to 2v$? ; compare com valores clássicos.

$\beta = 0,4 \longrightarrow \gamma = 1,09$, e

$p = 1,09 \times 1 \times 0,4 \times 3 \times 10^8 = 1,31 \times 10^8$ kgm/s

$\beta = 0,8 \Longrightarrow \gamma = 1,67$

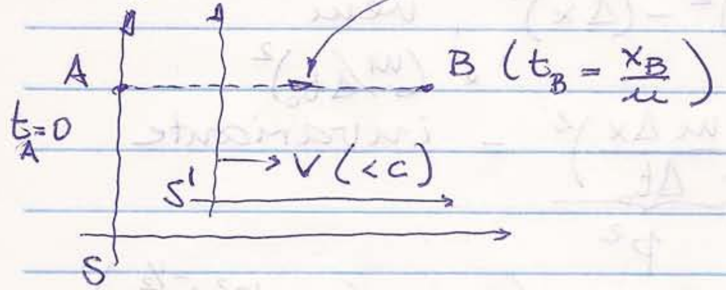
$p = \dots = 4,01 \times 10^8$ kgm/s

Valores clássicos: basta omitir γ!

→ A causa (provoca) B - seria um contra-senso que algum observador encontrasse B ocorrendo antes de A!

$\Rightarrow$ $t_A < t_B$ em qualquer referencial

Suponha, por absurdo, que exista alguma influência causal que se propague com $u > c$ $(u = \alpha c, \ \alpha > 1)$



Como os eventos A e B são vistos por S'? (configuração standard)

$A \ (x_A = 0, t_A = 0) \Longrightarrow x'_A = 0, \ t'_A = 0$

$B \ (x_B, \frac{x_B}{u}) \Longrightarrow$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{V x_B}{c^2} \right) = \gamma t_B \left(1 - \frac{V u}{c^2} \right)$$

$$\Downarrow$$

~~Logo~~ $$t'_B = \gamma t_B \left(1 - \frac{\alpha V}{c} \right)$$

Logo, se $V > \frac{c}{\alpha}$ (possível, porque $\alpha > 1$)

$$\Downarrow$$

$t'_B < 0$, e B acontece antes de A!

2.4 Energia relativística

Queremos encontrar definição que atenda aos requisitos:

1. se reduza ao caso clássico se $v \ll c$
2. $\sum_i E$ de sistema isolado deve se conservar em qualquer referencial inercial

Para atender a $\underline{1}$, ~~dev~~ sugere-se que envolva p^2 e m;

(escalar)

Sugerido por $\underline{2}$, consideremos quantidade que sabemos ser a mesma em todos os referenciais inerciais: o intervalo espaço-temporal.

Então: considere massa $\underline{m}$ que se move de $\underline{\Delta x}$ em $\underline{\Delta t}$, medidos em S. De

$$S^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \text{, vem}$$

$$\Downarrow \quad \times (m/\Delta t_0)^2$$

$$(mc)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{m \Delta x}{\Delta t_0}\right)^2}_{p^2} = \text{invariante}$$

Mas $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ $\quad \left(\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right)$

$$\Downarrow$$

$$(\gamma mc)^2 - p^2 = \text{invariante}$$

$$\Downarrow \times c^2 \text{ (por motivo que virá)}$$

$$(\gamma mc^2)^2 - p^2c^2 = \underbrace{\text{invariante}}_{\text{tem o mesmo valor}}$$

em qualquer referencial inercial – em particular, no referencial de repouso da massa $\underline{m}$, no qual $p = 0$ e $\gamma = 1$

$$\Downarrow$$

$$(\gamma mc^2)^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2$$

Então, se observadores ~~medem~~ em S e S' fazem medidas do objeto de massa m, eles acharão que

$$(\gamma mc^2)^2 - p^2c^2 = (\gamma' mc^2) - p'^2c^2$$

$\Rightarrow$ quantidade invariante, que depende quadraticamente de p e tem dimensão de energia (cheque!)

Por outro lado, S e S' medem valores p e p' diferentes para o momento, mas estes valores são conservados (independem do tempo). Portanto, as igualdades acima sugerem que a quantidade $\gamma m c^2$ seja a medida de uma propriedade importante. Mas que propriedade?

$\gamma m c^2$ tem dimensão de energia. Se $v \ll c$,

$$\gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) mc^2 =$$

$$= mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{expressão para a energia}}$$

cinética K no limite não relativístico.

Vamos mostrar em breve que, uma vez convenientemente definido o conceito relativístico de força, teremos verdadeiro o teorema

$$d(\gamma m c^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vamos, por isso, definir a energia total relativística como

$$E = \gamma m c^2 = \underbrace{mc^2}_{\text{energia de repouso}} + K, \text{ e}$$

K≥0 sempre!

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \quad , \quad E_0 = mc^2$$

Com estas definições, provamos que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

(relação Pitagórica)

De passagem, provamos que $E_0 = mc^2$ é invariante na classe dos referenciais inerciais.

Note também que:

$$pc = \gamma mvc = \frac{v}{c}\gamma mc^2 = \beta E$$

O triângulo velocidade-energia-momento é uma maneira conveniente de lembrar as relações entre estas 3 quantidades:

$$\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dl, "E=\gamma mc^2"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "p=\gamma mv"] & \\
 & pc=\beta E \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
E \arrow[ur] & E^2=(pc)^2+(mc^2)^2 \arrow[l] \arrow[r] & p \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

No limite não-relativístico, a energia de repouso mc^2 é uma constante que pode ser subtraída, já que o zero de energia é arbitrário. Portanto, definir $E = \gamma mc^2$ atende aos requisitos impostos no início.

Na Relatividade, a lei clássica de conservação da massa está errada: no século XX foram descobertos processos nucleares nos quais ocorrem grandes variações de massa, inclusive alguns em que a massa de repouso das partículas desaparece — ou aparece! — completamente. Portanto, neste contexto, $E_0 = mc^2$ deixa de ser irrelevante — de fato, torna-se extremamente importante.

Exemplos

1. Energia de repouso e energia cinética de
(a) bola de 100g com $v = 100\ m/s$
(b) amostra de 1kg de metal ($v = 0$)
(c) elétron com $v = 0{,}999c$

modelo: (a) e (b) são objetos clássicos, (c) é (altamente!) relativístico

solução:
(a) $E_0 = mc^2 = 0{,}10 \times 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^{15}\ J$
$K = \frac{1}{2} mv^2 = 0{,}10 \times \frac{1}{2} \times 10^4 = 500\ J$
(b) $E_0 = 9 \times 10^{16}\ J$: energia gerada por usina elétrica em 1 ano! Se for U^{235}, 1/1000 de E_0 pode ser convertido em calor por fissão nuclear $\Rightarrow$ gera $9 \times 10^{13}\ J$ de calor por kg!
(c) $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 22{,}4$
$E_0 = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 8{,}2 \times 10^{-14}\ J$
$K = (\gamma - 1) mc^2 = 1{,}7 \times 10^{-12}\ J$

comentário adicional: para os objetos clássicos, $E_0 \gg K$, o que se inverte para os relativísticos.

2. Elétron se move com $v = 0{,}99c$ medida no laboratório. Em que referencial sua massa de repouso é máxima, S (laboratório) ou S' (elétron)?

3. Uma colisão é elástica quando as massas de repouso não se alteram.
Considere colisão elástica e frontal de 2

partículas de massas m_1 e m_2:

(1) $\xrightarrow{v_1}$ (2) $v_2 = 0$ (Revise rapidamente o caso clássico)

(1) $\rightarrow v_3$ (2) $\rightarrow v_4$

Determine $\underline{v_3}$.

m<u>o</u>delo: há conservação de momento e energia

sol<u>ução</u>:

(i) conservação do momento:

$$\gamma_1 m_1 v_1 = \gamma_3 m_3 v_3 + \gamma_4 m_4 v_4$$

(ii) da energia:

$$\gamma_1 m_1 c^2 + \underbrace{\gamma_2}_{\gamma_2 = 1} m_2 c^2 = \gamma_3 m_3 c^2 + \gamma_4 m_4 c^2$$

$$\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 = \gamma_3 m_3 c^2 + \gamma_4 m_4 c^2$$

Podemos eliminar v_4, o que nos leva a uma equação quadrática para v_3 - <u>faça isto</u>! Uma solução desta equação é $v_3 = v_1$ (velocidade antes da colisão), que não nos interessa. A outra é

$$v_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}\, v_1$$

- Analise os casos:
  - $m_1 > m_2$; $m_1 < m_2$; $m_1 = m_2$; $m_1 << m_2$

- Tome o limite não relativístico

- Aplicação: 1 é píon, $m_1 = 2{,}49 \times 10^{-28}$ kg, $v_1 = 0{,}9c$, 2 é próton, $m_2 = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$\Rightarrow v_3 = -0{,}76c$ (resultado não relativístico: $v_3 = -0{,}62c$)

4. A unidade de energia + popular na física atômica e subatômica, territórios da maioria das aplicações da Relatividade, é o eletron volt (eV) e seus múltiplos. 1 eV é o trabalho necessário para mover 1 elétron ($q=-e=-1{,}60\times10^{-19}C$) através uma queda de potencial de 1 V:

$$1\ eV = q\,\Delta V = -1{,}60\times10^{-19}\times(-1) = 1{,}60\times10^{-19}\ J$$

Assim como o Joule é unidade muito grande neste domínio, o mesmo ocorre com o kg: muitas vezes a massa é dada implicitamente dando-se a energia de repouso mc^2, usualmente em eV, ou medindo-se a massa em eV/c^2.

Considere elétron ($m=9{,}109\times10^{-31}\ kg$); calcule E_0 em eV e massa em eV/c^2

$$E_0 = mc^2 = 9{,}109\times10^{-31}\times(2{,}998\times10^{8})^2 =$$

$$= 81{,}87\times10^{-15}J = \frac{81{,}87\times10^{-15}}{1{,}60\times10^{-19}} =$$

$$= 5{,}11\times10^{5}\ eV,\ \text{ou}$$

$$mc^2 = 0{,}511\ MeV = 511\ keV\ \ (\simeq 0{,}5\ MeV!),$$

e

$$m = 0{,}511\ MeV/c^2$$

5. Da mesma forma, nas aplicações da relatividade estaremos, em geral, mais interessados em pc do que em p. pc tem dimensão de energia, e p pode ser expressa em eV/c.

Um elétron se move com energia total $E=1{,}3\ MeV$ ($>E_0\simeq0{,}5\ MeV$). Determine

p (em MeV/c e unidades SI) e v.

modelo: $E > 2E_0 \Rightarrow$ domínio relativístico

solução: (i) o triangulo pitagórico nos dá

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}$$

$$pc = \sqrt{(1,3)^2 - (0,5)^2} = 1,2 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow p = 1,2 \text{ MeV}/c$$

Em SI:

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{1,602 \times 10^{-13} \text{ J}}{2,998 \times 10^{8} \text{ m/s}} = 5,34 \times 10^{-22} \text{ kgm/s}$$

$$\Rightarrow p = 1,2 \times 5,34 \times 10^{-22} \simeq 6 \times 10^{-22} \text{ kgm/s}$$

(ii) $$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{1,2}{1,3} = 0,92$$

$$\Rightarrow v = 0,9c$$

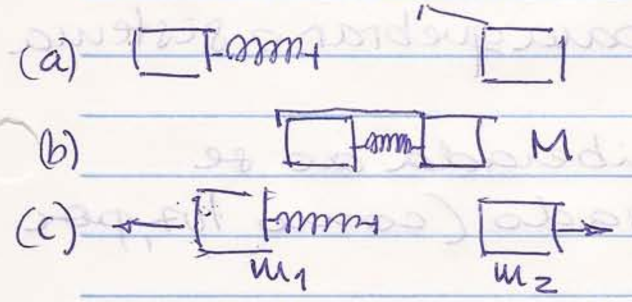
~~2.10~~ 2.11

2.6 Conversão entre massa e energia (Equivalência)

Na definição relativística, mesmo um objeto livre em repouso tem energia mc^2. Esta afirmação só faz sentido se houver alguma forma de converter pelo menos parte desta energia em alguma forma mais familiar. Este processo é chamado de conversão de massa em energia, e sua existência significa uma violação da lei clássica de conservação da massa.

Considere 2 objetos que podem se aproximar e formar objeto composto, e cuja interação caia com a distância. Sua interação pode ser repulsiva ou atrativa.

Um modelo repulsivo:



A energia potencial acumulada no sistema composto (igual ao trabalho externo realizado para formá-lo) torna este estado instável, se manifesta como um aumento de massa no sistema, e reaparece como energia cinética quando o sistema se quebra.

Em (b), $E = Mc^2$

(c), $E = E_1 + E_2 = K_1 + m_1c^2 + K_2 + m_2c^2$

$$\Downarrow$$

$Mc^2 = (K_1 + K_2) + (m_1 + m_2)c^2$, e $\Delta M c^2 = K_1 + K_2$

$$\Delta M = M - (m_1 + m_2) \quad \text{(defeito de massa)}$$

Podemos dizer que o trabalho feito para aproximar os objetos foi convertido num acréscimo de massa ΔM, e que este se converteu em energia cinética quando da ruptura do sistema.

Um modelo atrativo: um elétron e um próton podem formar um estado ligado estável, o átomo de hidrogênio, e um agente externo deve realizar trabalho (= 13,6 eV) para afastá-los. Este trabalho é chamado energia de ligação B. Portanto,

$$Mc^2 + B = m_1 c^2 + m_2 c^2,$$

e $M < (m_1 + m_2)$

$$\Rightarrow \quad \Delta M c^2 = B, \qquad \Delta M = m_1 + m_2 - M$$

$\Delta M c^2 =$ trabalho necessário para quebrar o sistema

ou

$\Delta M c^2 =$ energia liberada ao se formar o estado ligado (como luz, por exemplo)

2.7 Força na Relatividade

O fato de não termos precisado definir a noção de força até aqui reflete sua pouca importância na Relatividade. Para a maioria dos propósitos, a definição conveniente é aquela que torna verdadeira a 2ª lei na forma $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, Exemplos (sec. 2.6)

1. Tório 232 é instável, ou radioativo:

$$^{232}Th \rightarrow {}^{228}Ra + {}^{4}He$$

$K_{final} = 4\,MeV$; defeito de massa?

$$\Delta M = \frac{K_1 + K_2}{c^2} = 4\,MeV/c^2 = 4 \times \frac{10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} =$$

$$= 7 \times 10^{-30}\,kg$$

Podemos checar o resultado com as massas medidas destes átomos:

^{232}Th 232,038 u (unidades de massa atômica)

$$\left.\begin{array}{ll} ^{228}Ra & 228{,}031 \\ ^{4}He & 4{,}003 \end{array}\right\} 232{,}034$$

$$\Rightarrow \Delta M = 0{,}004\,u = 0{,}004 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$$

$$= 7 \times 10^{-30}\,kg$$

2. $O + O \rightarrow O_2 + E_{out}$, $E_{out} \simeq 5\,eV$ (luz)

ΔM?

$$\Delta M = \frac{E_{out}}{c^2} \simeq 5\,eV/c^2 = 5 \times \frac{1{,}6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} \simeq 9 \times 10^{-36}\,kg$$

3. $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$, $(\Rightarrow m_\Lambda > m_p + m_{\pi^-})$

com p_p e $p_{\pi^-} \parallel \hat{x}$, $p_p = 581\,MeV/c$ e $p_\pi = 256\,MeV/c$

$m_p = 938\,MeV/c^2$, $m_\pi = 140\,MeV/c^2$

m_Λ?

solução: em 3 etapas

relaçaõ pitagórica

(i) p e $m \Longrightarrow E_p$ e E_π
(ii) leis de conservação $\Longrightarrow E_\Lambda$ e p_Λ
(iii) E_Λ e $p_\Lambda \Longrightarrow m_\Lambda$

(i) $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

próton:

$$E_p^2 = (581)^2 + (938)^2 \Rightarrow E_p = 1103 \text{ MeV}$$

píon:

$$E_\pi^2 = (256)^2 + (140)^2 \Rightarrow E_\pi = 292 \text{ MeV}$$

(ii) $E_\Lambda = E_p + E_\pi = 1395 \text{ MeV}$

$$p_\Lambda = p_p + p_\pi = 837 \text{ MeV/c}$$

(iii) $m_\Lambda = \frac{1}{c^2}\sqrt{E_\Lambda^2 - (p_\Lambda c)^2} =$

$$= \frac{1}{c^2}\sqrt{(1395)^2 - (837)^2} = 1116 \text{ MeV/c}^2,$$

que é, de fato, a maneira como se mede a massa de muitas partículas subatômicas instáveis.

que se reduz trivialmente ao caso clássico no limite não relativístico.

Aqui também vale o teorema do trabalho e da energia: se uma massa m se move de $d\vec{r}$ sob ação da resultante $\vec{F}$,

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt$$

Mas, de $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ segue que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(p^2c^2 + m^2c^4)^{-1/2}\cdot 2\vec{p}\cdot c^2\frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \frac{\vec{p}c^2}{E}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{dE}{dt}\,dt = dE \quad //$$

A força + importante na maioria das aplicações da mecânica relativística é a força EM, determinada experimentalmente ser

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad \text{(Lorentz)}$$

Um caso importante no qual a equação de movimento é fácil de resolver é quando $\vec{B}$ é uniforme e $\vec{E}=0$. Neste caso, $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ é perpendicular a $\vec{v}$, e a energia é constante.

$\Downarrow$

$\vec{v}$ tem módulo constante e muda apenas de direção. Em particular, se o movimento for plano, a órbita é circular, de raio R:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma m a = q v B, \text{ e } a = \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{a} = \frac{v^{\cancel{2}} \gamma m}{q \cancel{v} B} = \frac{p}{qB} \,//$$

Este resultado sugere forma conveniente de medir $p = qBR$.

2.8 Partículas sem massa

Este objeto não pode existir na física clássica; e na Relatividade?

$p = \gamma m v$
$E = \gamma m c^2$ $\Rightarrow$ não; mas cuidado... se $v \to c$, $\gamma \to \infty$!

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$\beta = \frac{pc}{E}$$

se $m = 0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow \beta = 1$ e $v = c$!

Isto é: se $m = 0 \Leftrightarrow v = c$

$$\Downarrow$$

Portanto, as definições relativísticas de p e E não excluem a possibilidade de se ter $m = 0$ ($\Leftrightarrow v = c$). E o que diz a Natureza?

$$\Downarrow$$

Experimentos mostram que estes objetos existem, o + importante sendo o fóton (cap. 4)

Se não podemos usar as definições, como poderemos medir $\underline{p}$ e $\underline{E}$ para estas partículas? Resposta simples: vamos considerar processos que envolvam apenas uma delas. Por exemplo: fazer luz incidir sobre um átomo pode liberar um de seus elétrons, um processo chamado de fotoionização (entenda o significado do termo: fóton + ionização). Se este átomo é o hidrogênio, teremos

$$\overset{\text{fóton}}{\gamma} + H \rightarrow e + p$$

O ponto importante aqui é que $\underline{H}$, $\underline{e}$ e $\underline{p}$ têm massa $\Rightarrow$ momento e energia bem definidos. Portanto, podemos medi-los e inferir aqueles do fóton pela hipótese de conservação. ~~[illegible]~~

Ao usar este processo encontramos que:

(i) ele é consistente - obtemos os mesmos valores de $\underline{p}$ e $\underline{E}$ quando fótons idênticos são observados em 2 ou mais processos diferentes

(ii) os valores obtidos satisfazem a $pc = E$, característica essencial de objeto com $m = 0$ e $v = c$.

Além do fóton, há razões teóricas para se esperar a existência de outra partícula sem massa, o graviton, cuja relação com a gravitação seria análoga à do fóton com o EM. Ainda não há, porém, evidência experimental conclusiva da sua existência.

O neutrino, por algum tempo candidato a pertencer a esta classe de objetos, possui massa $\sim 10^{-5}$ da massa do elétron.

2.9 Quando usar a mecânica não-relativística?

Em linhas gerais, quando $\beta \ll 1$, ou $K \ll E_0$ e não houver variação de massa.

Mas a resposta terá que ser + cuidadosa se a pergunta envolver medidas de altíssima precisão: vimos num exemplo que, num avião com $v = 300\,m/s$, seu relógio se atrasa $\sim$ alguns nanossegundos, e efeitos relativísticos podem ser, neste caso, ignorados. Mas o sistema GPS precisa operar com medidas de tempo com erros menores que $1\,ns$, e a dilatação do tempo não pode, portanto, ser ignorada.

. Algumas regras gerais:

(i) se $\beta \ll 0{,}1 \Rightarrow$ não relativístico

(ii) se $\beta \geq 0{,}1 \Rightarrow$ relativístico

(iii) se $m = 0 \Rightarrow v = c$, relativístico

ou

(i) se $K \ll 1\% E_0 \Rightarrow$ não relativístico

(ii) se $K \geq 1\% E_0 \Rightarrow$ relativístico

Exemplo: (sec 2.8)

1. Existe uma partícula subatômica, chamada pósitron (anti-elétron) com massa $m_p = 0{,}511$ MeV ($= m_e$) e carga $q = e$. Sua propriedade + marcante: ao colidir com 1 elétron, as 2 partículas se aniquilam, e se convertem em 2 (ou mais) fótons (porque 2, no mínimo??). Considere desprezíveis as energias cinéticas e momentos das 2 partículas, e que 2 fótons sejam emitidos. Determine as energias destes fótons.

visualização: antes e^- e^+

depois $\xleftarrow{\gamma_1}$ $\xrightarrow{\gamma_2}$

$E_1, \vec{p}_1$ $\quad E_2, \vec{p}_2$

modelo: conservação de momento e energia, fóton é partícula de massa zero

solução:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{inicial} = 0 \implies \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$E_1 + E_2 = E_{inicial} = 2mc^2$$

$$E_1 = E_2 \; (= p_1 c = p_2 c) = mc^2 = 0{,}511 \text{ MeV}$$

comentário: no estado inicial, energia total é energia de repouso das 2 partículas, ou energia associada à massa; no estado final não há mais massa: o processo converte 100% da energia das massas em outra forma (EM, neste caso). A observação experimental destes processos é uma comprovação triunfal da afirmativa de que a energia de repouso mc^2 de uma massa m é uma energia real, e não o resultado da escolha de um zero esotérico para a energia.

O processo de aniquilação elétron-pósitron com a produção de 2 fótons de 0,511 MeV é observado rotineiramente em laboratórios de física de partículas, e ocorre naturalmente na atmosfera terrestre com pósitrons produzidos por radiação cósmica. Recentemente, astrônomos observaram fótons com exatamente 0,511 MeV oriundos do centro de nossa galáxia: a conclusão é que em alguma região deste centro pósitrons estão sendo criados e aniquilados em seguida para produzir estes fótons

Uma aplicação médica desta técnica é a tomografia por emissão de pósitrons (PET, em inglês): injeta-se no paciente solução contendo elemento radioativo emissor de pósitrons (^{11}C, por exemplo). A solução é escolhida para ser atraída para a área de interêsse (glucose para áreas ativas do cérebro) onde se monitora a emissão dos fótons de 0,511 MeV.